# 微分幾何ー接続から Hopf-Rinow の定理

2018 年 7 月 20 日

## 目次



## 1 計量と共変微分 (接続)

計量とは多様体に長さの概念を与えるものであり、計量から唯一つ定まる自然な Levi-Civita 接続と呼ばれる自然な接続が定義できる。計量の接続 (共変微分) によって与えられる測地線という概念によって多様体の二点間を結ぶ直線を定めることが出来る。特に計量が正定値 (Riemann 計量) であるとき実際に最短距離を与える曲線は測地線になっている。つまりその曲線のことを直線と呼んでいる。例えば $S^2$ 上の直線が大円であることは有名である。

多様体上の関数には外微分という線型な微分が定義できた。これと同じように多様体からその接束への滑らかな写像即ちベクトル場にも共変微分という微分演算を考えることが出来る。この共変微分は関数に対する微分の拡張になっている。接続即ちベクトル場の局所的な微分値を取ることによってその空間 (多様体) の曲がり具合を知ることが出来るとも言える。

対称な双線型形式によって内積が与えられるとある種の曲がり方つまり角度のよう

なものが定義できる。それに関する空間の曲がり具合と整合性の合う一意的な接続がLevi-Civita 接続だとも言える。。

接続 (共変微分) は一般にファイバー束における切断に対して定義することが出来る。上で述べた多様体の接続 (共変微分) とは接束に対する接続 (共変微分) ということになる。接束は多様体の性質を考える上でも重要な概念なのである。

## 1.1 共変外微分と Afine 接続

多様体には曲面における接平面を拡張した概念である接空間が一点ごとに定まりそれを束ねて多様体とみなしたものが接束であった。詳しくは**??**節に書いた。自然な

**定義 1.1** (接続または共変微分)**.** 多様体 $M$ 上の共変微分とは写像 (1.1) のうち以下の条件 1, 2 を満たすものである。但し $k \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}, f \in C^\infty(M), s \in C^\infty(TM)$ とし、$A^k(TM) = C^\infty(TM) \otimes A^k(M)$ とする。

$$\nabla \colon C^\infty(TM) \to A^1(TM). \tag{1.1}$$

1. $\nabla(as_1 + bs_2) = a\nabla s_1 + b\nabla s_2$.
2. $\nabla fs = df \otimes s + f\nabla s$.

また $A^k(TM)$ のことを $TM$ を値にもつ $k$ 形式という。($TM$ 値微分形式)

また以下の定義を見ればより共変微分が外微分の親戚であることがわかる。

**定義 1.2** (共変外微分)**.** 多様体 $M$ の $TM$ 値微分形式と共変微分 $\nabla$ に対して共変外微分作用素 $D$ を次の写像 1.2 のうち以下の条件 1, 2 を満たすものとして定める。但し $k \in \mathbb{N}, f \in C^\infty(M), \eta \in A^k(TM)$ とする。

$$D \colon A^k(TM) \to A^{k+1}(TM). \tag{1.2}$$

1. $D(f\eta) = df \wedge \eta + fD\eta$.
2. $D\eta = \nabla\eta \quad (k = 0)$.

定義 1.1 で定めた共変微分 $\nabla \colon C^\infty(TM) \to A^1(TM)$ と $X, Y \in C^\infty(TM)$ に対して $\nabla_Y X \in C^\infty(TM)$ をベクトル場 $X$ のベクトル場 $Y$ に沿った接続という。即ち $\nabla \colon C^\infty(TM) \times C^\infty(TM) \to C^\infty(TM)$ が定まるがそれを $\nabla(X, Y) := \nabla_Y X$ と書く。ここまでは共変微分が外微分の拡張ということを主に見てきたが、共変微分は Affine 接続の条件を満たすことが知られている。

**命題 1.3** (Affine 接続)**.** 多様体 $M$ の共変微分 $\nabla\colon C^\infty(TM) \to A^1(TM)$ は任意の $f \in C^\infty(M), X, Y, Z \in C^\infty(TM)$ に対して次の 1, 2, 3, 4 が成り立つ。

1. $\nabla_Z(X+Y) = \nabla_Z X + \nabla_Z Y.$
2. $\nabla_X fY = X[f]Y + f\nabla_Y X.$
3. $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z.$
4. $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y.$

また共変外微分と Lie 微分との関係も同じように成り立つ。

**命題 1.4.** 命題**??**で述べた Lie 微分と外微分の間の関係と同等な式が共変外微分でも成り立つ。

$$\begin{aligned} D\eta(X_1, \cdots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \nabla_{X_i} [\eta(X_1, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, X_{k+1})] \\ &\quad + \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \eta(X_1, \cdots, [X_i, X_j], \cdots, X_{k+1}). \end{aligned} \tag{1.3}$$

多様体の上の接続 $\nabla$ が与えられるとこの接続に関して曲がっていない曲線のことを接続 $\nabla$ に関する測地線という。測地線は直線を一般化したものである。厳密な定義はファイバー束を知っておく必要がある。とはいえせいぜい引き戻し束の定義を知っていれば問題ないのでここではそれを使って説明していく。

**定義 1.5** (測地線)**.** $(M, \nabla)$ を多様体とその上の任意の接続の組みとする。曲線 $c\colon I \to M$ が測地線であるとは次の式 1.4 を満たすことである。

$$^{c^*}\nabla_{\frac{d}{dt}} c^* \left( \frac{dc}{dt} \right) = 0. \tag{1.4}$$

これを測地線方程式という。

**注意 1.6.** $^{c^*}\nabla\colon C^\infty(^{c^*}TM) \to A^1(^{c^*}TM)$ は引き戻し束 $^{c^*}TM$ 上の接続であり、$\frac{d}{dt} \in C^\infty(TI), \frac{dc}{dt} \in C^\infty(^{c^*}TM)$ である。$^{c^*}TM$ とは接束 $TM$ の $c$ による引き戻し束である。引き戻し束の底空間は単位開区間 $I$ である。

測地線方程式の局所座標表示をみて見る。その前に多様体 $M$ の任意の接続 $\nabla$ と任意の点 $p$ とその局所座標近傍 $(U, \varphi)$ の座標表示 を $x$ とすると

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} := \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{1.5}$$

この $\Gamma$ を接続と局所座標表示によって決まるクリストフェル記号という。

**注意 1.7** (接続形式)**.** 一般にベクトル束の接続において局所標構に対して接続係数が定義される。任意の点に対して座標近傍 $(U, \varphi)$ が存在する。この座標表示を $(x^1, \cdots, x^m)$ とすれば $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^m} \right\}$ は局所標構となる。この局所標構に対する接続形式 $\omega_i^k \in A^1(U)$ は接続形式の定義より

$$\nabla \frac{\partial}{\partial x^i} = \omega_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{1.6}$$

(1.5) 式と比較して $\omega_i^k = \Gamma_{il}^k dx^l$ であることがわかる。

**命題 1.8** (測地線方程式)**.** 多様体とその上の接続の組 $(M, \nabla)$ に対して $M$ 上の曲線 $c\colon I \to M$ が測地線であるとは次の方程式 1.7 を満たすことである。但し曲線 $c\colon I \to M$ の局所座標表示を $\varphi(c(t)) = (x^1(t), \cdots, x^m(t))$ とする。

$$\frac{d^2 x^\ell}{dt^2} + (\Gamma \circ c)_{ik}^\ell \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0 \tag{1.7}$$

**証明.** $\dfrac{dc}{dt} = c_* \dfrac{d}{dt} \in C^\infty(TM)$ に気をつけると、1.4 は局所座標表示 $(U, x)$ では次のようになる。

$$\begin{aligned}
{}^{c^*}\nabla_{\frac{d}{dt}} c^* \left( \frac{dc}{dt} \right) \bigg|_U &= c^* \left( \nabla_{c_* \frac{d}{dt}} \frac{dc}{dt} \right) \bigg|_U && (1.8)\\
&= c^* \left[ \left( \nabla \frac{dc}{dt} \right) \left( c_* \frac{d}{dt} \right) \right] \bigg|_U && (1.9)\\
&= c^* \left[ \left( \nabla \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \left( \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right] && (1.10)\\
&= c^* \left[ \left( d\left( \frac{dx^i}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^l \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^l} \otimes dx^k \right) \left( \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right] && (1.11)\\
&= c^* \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{dx^i}{dt} dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^l \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^l} \otimes dx^k \right) \left( \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right] \\
&= c^* \left[ \delta_i^k \frac{dx^i}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^l \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \right] && (1.12)\\
&= c^* \left[ \frac{dx^k}{dt} \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^l \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} \frac{\partial}{\partial x^l} \right] && (1.13)\\
&= \left[ \frac{d^2 x^l}{dt^2} + (\Gamma \circ c)_{ik}^l \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} \right] c^* \frac{\partial}{\partial x^l} && (1.14)
\end{aligned}$$

□

ここで $\dfrac{dx^i}{dt}c^*\dfrac{\partial}{\partial x^i} \in C^\infty({}^{c^*}TU)$ だから曲線の微分はベクトル場の引き戻しである。つまり自励系の微分方程式になる。言い換えると $t$ に陽によらない。これは数学だけやってると意識しないが中途半端に物理をかじると筆者のように悩んでしまったりする。だから式変形だけ見ると $\dfrac{dx^k}{dt}\dfrac{\partial}{\partial x^k}\dfrac{dx^i}{dt} = \dfrac{d^2x^i}{dt^2}$ となっているがこれで正しい。

**定義 1.9** (パラメーター変換)**.** 測地線のパラメーターの取り方に関して $I = [0,1], \widetilde{I} = [a,b]$ とする。多様体 $M$ 上の曲線 $\widetilde{c}\colon \widetilde{I} \to M$ が $c\colon I \to M$ のパラメータ変換であるとは滑らかなある単調増加関数 $t\colon \widetilde{I} \to I$ が存在し、$t(a) = 0, t(b) = 1$ であって $\widetilde{c} := c \circ t$ となることである。

**注意 1.10.** 多様体 $M$ 上の曲線 $c\colon I \to M$ が測地線であるとき測地線 $c$ のパラメーター変換 $\widetilde{c}\colon \widetilde{I} \to M$ の満たす方程式即ち測地線を測地線に変換するには $\widetilde{x} = x \circ t$ として $\dfrac{d\widetilde{x}^i}{ds} = \dfrac{dx^i}{dt}\dfrac{dt}{ds}, \quad \dfrac{d^2\widetilde{x}^i}{d^2s} = \dfrac{d^2x^i}{dt^2}\left(\dfrac{dt}{ds}\right)^2 + \dfrac{dx^i}{dt}\dfrac{d^2t}{ds^2}$ に気を付けるとアフィン変換となることがわかる。

$$\frac{d^2\widetilde{x}^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{d\widetilde{x}^j}{ds}\frac{d\widetilde{x}^k}{ds} = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2\left[\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right] + \frac{d^2x^i}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2. \tag{1.15}$$

一方

$$\frac{d^2x^\ell}{dt^2} + (\Gamma \circ c)^\ell_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt} = f(t)\frac{dx^i}{dt} \tag{1.16}$$

という式を考える。

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\widetilde{x}^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{d\widetilde{x}^j}{ds}\frac{d\widetilde{x}^k}{ds} &= \left(\frac{dt}{ds}\right)^2\left[\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right] + \frac{d^2x^i}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2. && (1.17)\\
&= \left(\frac{dt}{ds}\right)^2\left[f(t)\frac{dx^i}{dt}\right] + \frac{d^2x^i}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2. && (1.18)\\
&= \left(\frac{dt}{ds}\right)^2\left[f(t)\frac{dx^i}{dt} + + \frac{d^2x^i}{dt^2}\right]. && (1.19)
\end{aligned}$$

式 (1.19) より微分方程式の解の存在と一意性より (1.16) という形の式はパラメーター変換で測地線にできる。以後測地線は $I = [0,1]$ 区間で定義されているものとする。

測地線は局所的には必ず存在することが直接的には定理 A.6 から導かれる。

**定理 1.11.** $(M, \nabla)$ を任意の多様体とその上の接続の組とする。任意の点 $p \in M$ に対して $(p,0) \in TM$ の開近傍 $\widetilde{U}_{(p,0)} \subset TM$ で次のようなものが存在する。任意の点

$(q,w) \in \widetilde{U}_{(p,0)}$ に対して唯一つの測地線 $c\colon I \to M$ が存在し、$c(0)=q$, $\left.\dfrac{dc}{dt}(t)\right|_{t=0} = w$ となる。

**証明.** $U$ を $p$ の開近傍とする。測地線方程式 (1.7) において $u^\ell := \dfrac{dx^\ell}{dt} \in C^\infty({}^{c^*}TU)$ とすると常微分方程式の解の存在と一意性より、ある $\epsilon > 0$ と $(p,0) \in TU$ の閉近傍 $\widetilde{D} \subset TU$ が存在して任意の $t \in (-\epsilon,\epsilon), (q,w) \in \widetilde{D}$ に対して以下の方程式を満たす $u\colon (-\epsilon,\epsilon) \to \widetilde{D}$ が唯一つ定まる。

$$u(0) = (q,w). \tag{1.20}$$

$$\frac{du^\ell}{dt} + (\Gamma \circ c)^\ell_{ik} u^i u^k = 0 \quad (\ell \in \{1,\cdots,m\}). \tag{1.21}$$

また必要なら $\epsilon$ と $\widetilde{D}$ を小さく取り直して以下の方程式を満たす $c\colon (-\epsilon,\epsilon) \to \widetilde{D}$ が唯一つ定まるようにできる。

$$c(0) = q. \tag{1.22}$$

$$\frac{dc}{dt} = u. \tag{1.23}$$

$\dfrac{\epsilon}{2} < 1$ であるとき $\widetilde{D}$ を必要に応じて小さく取れば $\widetilde{c}(t) = c\left(\dfrac{\epsilon}{2}t\right)$ とすることで $\widetilde{c}$ を測地線とすることが出来る。 □

**定義 1.12** (指数写像)**.** 定理 1.11 より任意の点 $p \in M$ に対して $T_pM$ の開近傍 $\widetilde{V}_p(0;\delta) = \{\boldsymbol{v} \in T_pM \|\boldsymbol{v}\| < \delta\}$ が存在して任意の $w \in \widetilde{V}_p(0;\delta)$ に対して唯一つの測地線 $c\colon I \to M$ 唯一つの測地線 $c\colon I \to M$ が存在して $c(0)=p$, $\dfrac{dc}{dt}|_{t=0} = w$ となる。ただし $\widetilde{V}_p(0;\delta)$ の定義にあるノルムは $\mathbb{R}^m$ のユークリッドノルムである。このとき $\exp(p,\boldsymbol{v})(t) := c(t)$ とおいて以下の写像を $\mathrm{Exp}(p,\boldsymbol{v}) := \exp(p,\boldsymbol{v})(1)$ によって定める。

$$\mathrm{Exp}\colon TM \to M. \tag{1.24}$$

**補題 1.13.** 任意の点 $p \in M$ に対して $(p,0) \in TM$ における指数写像の微分写像は恒等写像である。

**証明.** $TM$ の曲線 $\boldsymbol{V}\colon I \to TM$ が $\boldsymbol{V}(0) = (p,0)$ であるとき任意の $t \in I$ に対して $\boldsymbol{V}(t) \in T_pM$ である。$\exp(p,\boldsymbol{v}t)(1) = \exp(p,\boldsymbol{v})(t)$ に注意すると $\boldsymbol{V}(t) = \boldsymbol{v}t \in T_pM$ であるとき $\dfrac{d(\boldsymbol{v}t)}{dt}|_{t=0} = \boldsymbol{v} \in T_{(p,0)}T_pM$ であり $\mathrm{Exp}(p,0)_*\boldsymbol{v} = \left.\dfrac{d\exp(p,\boldsymbol{v}t)(1)}{dt}\right|_{t=0} = \boldsymbol{v}$. 一方任意の $\boldsymbol{V}(t)$ に対しても $\left.\dfrac{d\boldsymbol{V}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \boldsymbol{v}$ ならば接ベクトルの微分写像は与えられる曲線

にはよらないので $\mathrm{Exp}(p,0)_* = id_{T_pM}$である。ただし自然に $T_{(p,0)}T_pM \simeq T_pM$ とみなしている。 $\square$

即ち原点近傍の指数写像の微分は恒等写像である。

**系 1.14.** 任意の点 $p \in M$ に対して $(p,p)$ のある開近傍 $\mathcal{U} \subset M \times M$ と $(p,0) \subset TM$ の開近傍 $\mathcal{V} \subset TM$ が存在して $F(q,v) := (q, \mathrm{Exp}(q,v))$ で定まる微分同相写像が存在する。

$$F \colon \mathcal{V} \simeq \mathcal{U}.$$

**定義 1.15** (正規座標)**.** $(M,\nabla)$ を多様体とその上の接続の組とする。任意の点 $p$ に対して補題 1.13 と逆写像の定理よりある $\delta > 0$ が存在して $\mathrm{Exp}\colon \widetilde{V}_p(0;\delta) \to \mathrm{Exp}(\widetilde{V}_p(0;\delta)) \subset M$ は微分同相写像になる。このとき $\widetilde{V}_p(0;\delta)$ の正規直交標構がこの多様体の座標として $(\mathrm{Exp}, \widetilde{V}_p(0;\delta))$ が点 $p \in M$ の座標近傍となる。これを多様体 $M$ と接続 $\nabla$ による正規座標という。次で定義する捩率が 0 ならば正規座標は原点で 0 になる。

**定義 1.16** (捩率)**.** 多様体とその上の接続の組 $(M,g)$ に対して次で定まるテンソル場 $T\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ を捩率という。但し、$X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ とする。

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]. \tag{1.25}$$

## 1.2 擬 Riemann 計量

**定義 1.17** (擬 Riemann 計量)**.** $g \in C^\infty(T^*M \otimes T^*M)$ が非退化な対称双線型形式であるとき $g$ を擬 Riemann 計量という。また $(M,g)$ を擬 Riemann 多様体という。

今まで接ベクトル $\boldsymbol{v} \in T_pM$ のノルム (長さ) を $T_pM$ のユークリッドノルムにしていたが、これからは $\|\boldsymbol{v}\| := \sqrt{|g_p(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})|}$ とする。但しルートの中身は絶対値とする。$g$ が Riemann 計量ならばいらぬ心配である。

**定義 1.18** (計量接続)**.** 擬 Riemann 多様体 $(M,g)$ に対して接続 $\nabla$ が計量的であるとは任意の $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$dg(X,Y) = g(\nabla X, Y) + g(X, \nabla Y)$$

を満たすことである。

**定義 1.19** (Levi-Civita 接続)**.** 擬 Riemann 多様体 $(M,g)$ の計量接続 $\nabla$ であってこの $\nabla$ の捩率が 0 となるものを Levi-Civita 接続という。

**定理 1.20** (Levi-Civita 接続の一意性)**.** 任意の擬 Riemann 多様体 $(M,g)$ に対して唯一つの Levi-Civita 接続が存在する。

## 1.3 完備 Riemann 多様体

**定義 1.21** (Riemann 計量)**.** 擬 Riemann 計量 $g$ が正定値であるとき $g$ を Riemann 計量という。また組 $(M,g)$ を Riemann 多様体という。

**補題 1.22** (Gauss の補題)**.** 任意の $t\in I$ に対して $\boldsymbol{v}(t)=1,\quad \boldsymbol{v}(t)\in\widetilde{V}_p(0;\delta)$ [*1] とする。即ち $\boldsymbol{v}\colon I\to T_pM$ を常に速さ 1 の曲線とし $1<\delta$ とする。滑らかな写像 $f\colon[0,\delta)\times(0,1]\to M$ を $f(r,t):=\exp(p,r\boldsymbol{v}(t))(1)$ として定める。このとき次が成り立つ。

$$(f^*g)_{(r,t)}\left(\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial f}{\partial t}\right)=0.$$

**証明.**

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{(f^*g)\left(\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial f}{\partial t}\right)\right\} \tag{1.26}$$

$$=(f^*g)\left({}^{f^*}\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial f}{\partial t}\right)+(f^*g)\left(\frac{\partial f}{\partial r},{}^{f^*}\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\frac{\partial f}{\partial t}\right) \tag{1.27}$$

$$=(f^*g)\left(\frac{\partial f}{\partial r},{}^{f^*}\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\frac{\partial f}{\partial t}\right) \tag{1.28}$$

$$=(f^*g)\left(\frac{\partial f}{\partial r},{}^{f^*}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial f}{\partial r}\right)\because\nabla\text{ は Levi-Civita.} \tag{1.29}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(f^*g)\left(\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial f}{\partial r}\right) \tag{1.30}$$

一方 $(f^*g)\left(\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial f}{\partial r}\right)=(f^*g)\left(\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial f}{\partial r}\right)\Big|_{r=0}=\|\boldsymbol{v}(t)\|^2=1$ であるので $\frac{\partial}{\partial r}\left\{(f^*g)\left(\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial f}{\partial t}\right)\right\}=0$ である。

$$(f^*g)\left(\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial f}{\partial t}\right)\Big|_{(0,t)}=(f^*g)\left(\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial f}{\partial t}\right)\Big|_{(r,t)}=0,\quad\forall(r,t)\in[0,\delta)\times(0,1].\qquad\square$$

**定理 1.23.** $(M,g)$ を Riemann 多様体とし、$\nabla$ を $g$ の Levi-Civita 接続とする。$p\in M$ に対して $\delta>0,\widetilde{V}_p(0;\delta):=\{\boldsymbol{v}\in T_pM;\|\boldsymbol{v}\|<\delta\}$ とする。このとき次の 1, 2, 3, 4 が成り立つ。

[*1] ここでは測地線や指数写像の議論をしているときとは $\widetilde{V}_p(0;\delta)$ の意味が変わってしまっている。

1. 任意の $t \in I$ に対して $\left\| \dfrac{d}{dt}\exp(p, \boldsymbol{v})(t) \right\| = \|\boldsymbol{v}\|$ が成り立つ。即ち測地線の速さは一定である。
2. 任意の点 $p \in M$ に対してある $p$ のコンパクトな近傍 $K$ と $\delta > 0$ が存在して任意の $q \in K$ に対して $\mathrm{Exp}\,|_{\widetilde{V}_q(0;\delta)} \colon \widetilde{V}_q(0;\delta) \to M$ は像への同相写像になる。
3. 任意の点 $p$ と $\mathrm{Exp}\,|_{(\widetilde{V}_p(0;\delta))} \colon \widetilde{V}_p(0;\delta) \to M$ が像への同相写像となる $\delta$ に対して測地線 $\exp(p, \boldsymbol{v}) \colon I \to M$ は $p$ と $q = \mathrm{Exp}(p, \boldsymbol{v})$ を結ぶ最短曲線となる。ここで任意の点 $p, q \in M$ を結ぶ最短曲線の長さを $g$ によって定まる 2 点 $p, q$ の距離 $d_g(p, q)$ とする。
4. 任意の点 $p \in M$ と $\delta > 0$ に対して $U(p; r) := \{q \in M; d_g(p, q) < r\} \subset M$ とする。$\mathrm{Exp}\,|_{\widetilde{V}_p(0;\delta)} \colon \widetilde{V}_p(0;\delta) \to M$ が像への同相写像となる $\delta$ に対して $r < \delta$ ならば $\mathrm{Exp}(\widetilde{V}_p(0; r)) = U(p; r)$ となる。

**証明.** 1 の証明.

$\boldsymbol{v}(t) = \dfrac{d}{dt}\exp(p, v)(t)$ とおくと $\|\boldsymbol{v}(t)\|^2 = g(\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{v}(t))$ であるため

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{v}(t)\|^2 = \frac{d}{dt} g(\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{v}(t)) \tag{1.31}$$

$$= g({}^{c^*}\nabla_{\frac{d}{dt}}\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{v}(t)) + g(\boldsymbol{v}(t), {}^{c^*}\nabla_{\frac{d}{dt}}\boldsymbol{v}(t)) \tag{1.32}$$

$$= 0 \tag{1.33}$$

2 の証明.

常微分方程式の解の存在と一意性より式 (1.21) の条件を満たす測地線の速さの上限によって $\delta > 0$ を定めるが、これはコンパクト集合 $K$ を定義域とする関数 $\Gamma uu$ の最大値によって決まる。またこのとき任意の $x \in K$ に対して $\|u\| < \delta$ のもとで $\dfrac{dx}{dt} = u$ を満たす。

3 の証明.

2 の $\delta > 0$ に対して $\delta > \delta' > 0$ を固定する。以下では曲線 $c \colon I \to M, c(0) = p$ が $\widetilde{V}_p(0; \delta')$ 内にあるかどうかで場合分けをする。この証明の中で測地線は $\widetilde{c}(t) = \exp(p, \boldsymbol{v})(t)$ と表す。$p, q = \exp(p, \boldsymbol{v})(1) \in \widetilde{V}_p(0; \delta')$ を結ぶ任意の曲線 $c \colon I \to M$ は滑らかな $r \colon I \to \mathbb{R},\quad \boldsymbol{v} \colon I \to T_pM, r(0) = 0, \|\boldsymbol{v}(t)\|^2 = 1$ によって $c(t) = \exp(p, r(t)\boldsymbol{v}(t))(1)$ とあらわせることに注意する。

**段階 1.** $c(I) \subset \widetilde{V}_p(0; \delta')$ であるとき

$$|\dot{c}| = \left|\frac{\partial \exp(p, r(t)\boldsymbol{v}(t))(1)}{\partial t} + \frac{\partial \exp(p, r(t)\boldsymbol{v}(t))(1)}{\partial r}\right| \left|\frac{dr}{dt}\right| \tag{1.34}$$

$$\geq \left|\frac{\partial \exp(p, r(t)\boldsymbol{v}(t))(1)}{\partial r}\right| \left|\frac{dr}{dt}\right| \tag{1.35}$$

$$= |\boldsymbol{v}| \left|\frac{dr}{dt}\right| \tag{1.36}$$

$$= \left|\frac{dr}{dt}\right| \tag{1.37}$$

従って

$$\int_I |\dot{c}| dt \geq \int_I \left|\frac{dr}{dt}\right| dt \tag{1.38}$$

$$\geq \left|\int_I \frac{dr}{dt} dt\right| \tag{1.39}$$

$$= |r(1) - r(0)| \tag{1.40}$$

$$= |r(1)| \tag{1.41}$$

$$= |\boldsymbol{v}| \tag{1.42}$$

$$= L[\tilde{c}]. \tag{1.43}$$

ここで等号成立は $\dfrac{\partial \exp(p, r(t)\boldsymbol{v}(t))(1)}{\partial t} = 0$ かつ $r$ が単調増加することである。つまりパラメーター変換を除いて測地線ということがわかる。

**段階 2.** $c(I) \not\subset \widetilde{V}_p(0; \delta')$ であるとき

$q' \in c(I) \cap \widetilde{V}_p(0; \delta')$ をとると $p$ から $q'$ を結ぶ長さが $\delta'$ より大きいので $L[c] > \delta' \geq L[\tilde{c}]$. □

**補題 1.24.** $(M, g)$ を連結な Riemann 多様体とする。このとき任意の点 $p_1, p_2 \in M$ に対して $c\colon I \to M, c(0) = p_1, c(1) = p_2$ が定まり、

$$d_g(p_1, p_2) = \inf\left\{\int_I |\dot{c}| dt \ ; \ c\colon I \to M, c(0) = p_1, c(1) = p_2\right\} \tag{1.44}$$

は距離関数となる。つまり $(M, g)$ は Levi-Civita 接続が定める距離空間の構造を持つ。

**補題 1.25.** $(M, g)$ を Riemann 多様体とする。$c\colon I \to M$ を区分的に滑らかな曲線とする。$d_g(c(0), c(1)) = \int_I |\dot{c}| dt$ なら $c\colon I \to M$ は滑らかな測地線となる。

これらの補題 1.241.25 の証明は省略する。しかし次の補題は本質的に Hopf-Rinow の定理であり重要である。

**補題 1.26.** $(M, g)$ を Riemann 多様体とする。ある点 $p$ で指数写像が大域的に定義されているならば、点 $p$ における指数写像は全射である。またこのとき点 $p$ と任意の点を繋ぐ測地線は 2 点間の最短曲線である。

**証明.** 指数写像が大域的に定義されている点 $p \in M$ での指数写像は以下である。

$$\mathrm{Exp}\colon T_pM \to M \tag{1.45}$$

任意の点 $q \in M$ を選び、$p$ と $q$ を繋ぐ曲線を考える。十分小さな $\delta_0 > 0$ を取ると $|v| = 1$ となる任意の $v \in T_pM$ に対して $\exp(p, v)(t), t \in [0, \delta_0]$ が $p$ と $\exp(p, v)(\delta_0)$ を結ぶ最短曲線となる。ここで $S_{\delta_0}(p) := \{p' \in M\ ;\ d_g(p, p') = \delta_0\}$ とおくと $S_{\delta_0}(p)$ はコンパクトだから $F_q\colon M \ni p' \mapsto d_g(q, p') \in \mathbb{R}$ の $S_{\delta_0}(p)$ における最小値が存在する。即ち $d_g(q, p_0) = \min_{p' \in S_{\delta_0}(p)} d_g(q, p')$ となる点 $p_0 \in S_{\delta_0}(p)$ が存在する。ここで $\widetilde{c}(t) = \exp(p, v)(t)$ とおくとき $\widetilde{c}\colon [0, d_g(p, q)] \to M$ が $p$ と $q$ を結ぶ最短曲線即ち測地線になることを示す。即ち $J := \{t \in [0, d_g(p, q)]\ ;\ t + d_g(\widetilde{c}(t), q) = d_g(p, q)\} = [0, d_g(p, q)]$ となることを示す。

**段階 1.** $[0, \delta_0] \subset J$ である

$\delta_0 = d_g(p, p_0)$ であるから三角不等式より、

$$d_g(p, p_0) + d_g(p_0, q) \geq d_g(p, q) \tag{1.46}$$

$$\delta_0 + d_g(\widetilde{c}(\delta_0), q) \geq d_g(p, q) \tag{1.47}$$

一方任意の $\epsilon > 0$ に対してある $p$ と $q$ を繋ぐ曲線 $c\colon I \to M$ が存在して $L[c] < d_g(p, q) + \epsilon$ となる。$p' \in c(I) \cap S_{\delta_0}(p)$ を一つとってくると、

$$d_g(p, p') + d_g(p_0, q) \leq d_g(p, p') + d_g(p', q) \leq L[c] < d_g(p, q) + \epsilon$$

. 従って

$$\delta_0 + d_g(\widetilde{c}(\delta_0), q) \leq d_g(p, q) \tag{1.48}$$

となる。また任意の $t \in [0, \delta_0)$ に対して $t = d_g(p, \widetilde{c}(t))$ 故に $t + d_g(\widetilde{c}(t), p_0) = d_g(p, p_0) = \delta_0$ である。

$$t + d_g(\widetilde{c}(t), q) \leq t + d_g(\widetilde{c}(t), p_0) + d_g(p_0, q) \tag{1.49}$$

$$= \delta_0 + d_g(p_0, q) \tag{1.50}$$

$$= d_g(p, q) \tag{1.51}$$

また逆に以下が成り立つ。

$$d_g(p,\widetilde{c}(t)) + d_g(\widetilde{c}(t),q) \geq d_g(p,q).$$

**段階 2.** $[0,d_g(p,q)] = J$ である

$t_\infty := \sup J$ とする。$t_\infty < d_g(p,q)$ であることを仮定して矛盾を導く。ある単調増大列 $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在し、$t_n + d_g(\widetilde{c}(t_n),q) = d_g(p,q)$ が成り立つので $t_\infty \in J$ である。$p_1 := \widetilde{c}(t_\infty)$ とする。先ほどと同じ様に、十分小さな $\delta_1 > 0$ を取る。$|v_1| = 1$ となる任意の $v_1 \in T_{p_1}M$ に対して $\exp(p_1,v_1)(t), t \in [0,\delta_1]$ が $p$ と $\exp(p,v_1)(\delta_1)$ を結ぶ最短曲線となる。ここで $S_{\delta_1}(p_1) := \{p' \in M \ ; \ d_g(p,p') = \delta_1\}$ とおくと $S_{\delta_1}(p_1)$ はコンパクトだから $F_q\colon M \ni p' \mapsto d_g(q,p') \in \mathbb{R}$ の $S_{\delta_1}(p)$ における最小値が存在する。$d_g(q,p_1) = \min_{p'\in S_{\delta_1}(p)} d_g(q,p')$ となる点 $p_\infty \in S_{\delta_1}(p_1)$ が存在する。ここで $\widetilde{c}_1(t) = \exp(p_1,v_1)(t)$ とおく。段階 1 より任意の $t \in [0,\delta_1]$ に対して以下が成り立つ。

$$t + d_g(\widetilde{c}_1(t),q) = d_g(p_1,q). \tag{1.52}$$

特に $\delta_1 + d_g(p_1,q) = d_g(p_\infty,q)$ 成り立つ。

$$c_\infty(t) := \begin{cases} \widetilde{c}(t) & (t \in [0,t_\infty]) \\ \widetilde{c}_1(t-t_\infty) & (t \in [t_\infty, t_\infty+\delta_1]) \end{cases} \tag{1.53}$$

$$t_\infty + d_g(p_\infty,q) = d_g(p,q). \tag{1.54}$$

$$\begin{aligned} L[c_\infty] &= t_\infty + \delta_1 && (1.55)\\ &= d_g(p,p_\infty) + d_g(p_\infty,p_1) && (1.56)\\ &\geq d_g(p,p_1) && (1.57) \end{aligned}$$

一方そもそも $L[c_\infty] \leq d_g(p,p_1)$ なので、$L[c_\infty] = d_g(p,p_1)$. これは $t_\infty$ が $J$ の上限であることに矛盾する。2 点間の最短曲線になるということも定理 1.23 の 3 より成り立つ。

□

**定理 1.27** (Hopf-Rinow)**.** 連結な Riemann 多様体 $(M,g)$ において以下の 1234 は同値である。

1. ある点 $p \in M$ が存在して $p$ での指数写像が大域的に定義されている。
2. 任意の有界閉集合 $B \subset M$ はコンパクトである。

3. 距離空間 $(M, d_g)$ は完備である。[*2]
4. 任意の点 $p \in M$ が存在して $p$ での指数写像が大域的に定義されている。[*3]

**証明.**

**段階 1.** 1 ならば 2 を示す。

$B \subset M$ を任意の有界閉集合とする。仮定よりある点 $p \in M$ で指数写像が大域的に定義されている。また $B$ は有界なのである $R > 0$ が存在して $B \subset \mathrm{Exp}_p(\overline{\widetilde{V}_p(0;R)})$ と出来る。但し $\overline{\widetilde{V}_p(0;R)}$ はコンパクトなので $B$ はコンパクト集合の中の閉部分集合なのでコンパクトになる。

**段階 2.** 2 ならば 3 を示す。

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ を任意の Cauchy 列とする。Cauchy 列は有界なので、$K := \overline{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$ とすると $K$ はコンパクトである。従って $K$ の集積点 $\alpha \in K$ で任意の開近傍 $\alpha \in U$ が無限個の $K$ の元を含むものが存在する。もしそうでないと仮定すると、任意の点 $a \in K$ に対してある開近傍 $U_a$ が存在して $U_a \cap K$ は有限集合となる。この様な開集合を各点で取り以下の様に開被覆を構成する。

$$K \subset \bigcup_{a\in K} U_a.$$

このとき各開集合は $K$ の元を有限個しか含まないが、一方 $K$ はコンパクトなので有限部分被覆が取れる。これは $K$ が無限集合であることに矛盾する。従ってこの集積点 $\alpha \in M$ に収束する $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$ の部分列が存在する。ところが $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$ は Cauchy 列であるため $\alpha \in M$ に収束する。

**段階 3.** 3 ならば 4 を示す。

任意の点 $p \in M$ と $|v| = 1$ を満たす任意の $v \in T_pM$ に対して $t_\infty = \sup\{t \in \mathbb{R}_{>0}\ ;\ \exp(p,v)(t)$ が定義されている $\}$ を定める。$c(t) = \exp(p,v)(t)$ とおく。$t_\infty < \infty$ と仮定する。このとき、ある単調増大列 $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で $t_\infty$ に収束するものが取れる。$\{c(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $d_g(c(t_n), c(t_m)) \leq |t_n - t_m|$ となるから Cauchy 列になる。従って $\lim_{n\to\infty} c(t_n) = p_\infty$ となる点 $p_\infty \in M$ が存在する。定理 1.23 の 3 よりある $\delta > 0$ と十分小さな $p_\infty$ のコンパクト近傍 $K$ が存在し、任意の $q \in K$ に対して $\mathrm{Exp}\colon \widetilde{V}_q(0;\delta) \to M$

---

[*2] このとき $(M, g)$ を完備 Riemann 多様体という。
[*3] この条件を測地的完備という。

が像への微分同相写像となる。ある $t_n \in K$ が存在して $t_\infty < t_n + \frac{1}{2}\delta$ となる。故に $c$ は $[0, t_n + \dfrac{\delta}{2}]$ で定義されるのでこれは $t_\infty$ の定義に矛盾する。

□

# 付録 A　常微分方程式の解の存在と一意性

常微分方程式の解の存在と一意性定理は一径数変換群とか測地線は局所的には一意的に存在するとか幾何をやる上でも極めて重要であるが、しばしば後回しにされたり省略されたりする。ここではそんな当たり前の常微分方程式の解の存在と一意性についての証明を行う。

**定義 A.1** (初期値条件)**.** 閉部分集合 $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を定義域とする $\mathbb{R}^n$ 値連続関数 $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ が与えられたとき任意の $(t, x) \in D (x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R})$ に対して次の A.1 A.2 を満たす $\mathbb{R}^n$ 値関数 $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ を求める問題を初期値問題といい A.1 を初期値条件という。

$$x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{A.1}$$

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x) \tag{A.2}$$

以下では $r, R > 0$ を正の実数として

$$D := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; ||x - x_0|| \leq R, |t - t_0| \leq r\}$$

とする。

**定義 A.2** (局所解)**.** 初期値問題が $t_0$ 近傍で解を持つとは

$$M := \max_{(t,x)\in D} \|f(t, x)\| \tag{A.3}$$

$$\delta := \min\{r, R/M\} \tag{A.4}$$

としたとき $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ が $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ で (A.1) と (A.2) を満たすことである。このときの $x(t), (t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta))$ を $t_0$ 近傍の局所解ともいう。

**定義 A.3.** 閉部分集合 $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ で定義された連続関数 $f\colon D \to \mathbb{R}^{n+1}$ が各点 $t$ に対して Lipschitz 条件を満たすとはある $L > 0$ が存在して任意の $(t, x), (t, x') \in D$ に対して $\|f(t, x) - f(t, x')\| < L\|x - x'\|$ となることである。[*4]

[*4] $t$ を固定した連続関数 $f_t\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が Lipschitz 連続であることと同じ事を言っている。また Lipschitz 連続は連続より強い条件であるが次で示すように微分可能とは限らない。

**注意 A.4.** $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ で連続な $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ が $x \in \overline{U}(x_0; R)$ について全微分可能であるなら

$$L := \max_{(t,x)\in D} \left( \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial f}{\partial x^i}(t,x) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i=1}^{n} M(i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

として定めると以下のように Lipschitz 連続であることがわかる。

$$\begin{aligned}
f(t,x) - f(t,x') &= \sum_{i=1}^{n} \left( \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(t,(1-s)x' + sx)(x^i - x'^i) ds \right) && \text{(A.5)} \\
\|f(t,x) - f(t,x')\| &\leq \sum_{i=1}^{n} \left( \int_0^1 \left\| \frac{\partial f}{\partial x^i}(t,(1-s)x' + sx) \right\| \|x^i - x'^i\| ds \right) && \text{(A.6)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left( \left\| \frac{\partial f}{\partial x^i}(t,(1-s)x' + sx) \right\| \|x^i - x'^i\| \right) && \text{(A.7)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} M(i) \|x^i - x'^i\| && \text{(A.8)} \\
&\leq \left( \sum_{i=1}^{n} M(i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|x - x'\| (\because \text{Cauchy-Schwarz 不等式}) && \text{(A.9)} \\
&= L\|x - x'\| && \text{(A.10)}
\end{aligned}$$

ここでは滑らかな関数くらい性質の良い関数しか出てこないのでこれらは基本的に Lipschitz 連続かどうかなんて考えるまでもなくそうなってますよという注意です。つまり常微分方程式の解の存在と一意性は Lipschitz 連続であることが必要になります。今からこの初期値問題の局所解の存在と一意性について述べたいと思いますが、その前に一つ Cauchy 列に関する補題を証明します。

**補題 A.5.** 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ が以下を満たすとき $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は Cauchy 列である。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n - a_{n-1}\| < \infty.$$

**証明.** $m > n$ として

$$\begin{aligned}
\|a_m - a_n\| &= \|(a_m - a_{m-1}) + \cdots + (a_{n+1} - a_n)\| && \text{(A.11)} \\
&\leq \sum_{k=n}^{\infty} \|a_{k+1} - a_k\| \to 0 (n \to 0). && \text{(A.12)}
\end{aligned}$$

□

**定理 A.6** (Cauchy の存在と一意性定理)**.** 連続写像 $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ が Lipschitz 条件をみたすとき初期値問題 (A.1)(A.2) の局所解が唯一つ存在する。

**証明.** 任意の $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ に対して局所解は次の形で与えられる。

$$x(t) = \begin{cases} x(t_0) & + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \quad (t \leq t_0) \\ x(t_0) & + \int_{t}^{t_0} f(s, x(s))ds \quad (t \geq t_0) \end{cases} \tag{A.13}$$

ただしこれでは微分方程式を積分しただけであってこれが解けるつまり解が存在することを逐次近似によって証明する。先ずは以下のように $D$ 内の数列 $\{x_n(t)\}_{n=0}^{\infty} \subset D$ が各点に定まることをみる。以下 $t \geq t_0$ の場合のみ証明する。

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0 \\ x_n(t) = \begin{cases} x_0 & + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))ds \quad (t \leq t_0) \\ x_0 & + \int_{t}^{t_0} f(s, x_{n-1}(s))ds \quad (t \geq t_0) \end{cases} \end{cases} \tag{A.14}$$

$x_0$ は定数関数であり明らかに $(t, x_0) \in D$ である。

$$\|x_n(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_{n-1}(s))\| ds \tag{A.15}$$

$$\leq M(t - t_0) \tag{A.16}$$

$$\leq M\delta = R \tag{A.17}$$

次に各点 $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ でこの数列 $\{x_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列であることを示す。

$$\|x_n(t) - x_{n-1}(t)\| \leq \frac{RL^{n-1}}{(n-1)!}(t - t_0)^{n-1} \tag{A.18}$$

となることを帰納法で示す。式 (A.17) より

$$\|x_1(t) - x_0(t)\| \leq R.$$

したがって $n=k$ のとき $\|x_k(t)-x_{k-1}(t)\| \leq \frac{RL^{k-1}}{(k-1)!}(t-t_0)^{k-1}$.

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1}(t)-x_k(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s,x_k(s))-f(s,x_{k-1}(s))\|ds && \text{(A.19)}\\
&\leq L\int_{t_0}^{t} \|x_k(s)-x_{k-1}(s)\|ds && \text{(A.20)}\\
&\leq L\int_{t_0}^{t} \|x_k(s)-x_{k-1}(s)\|ds && \text{(A.21)}\\
&\leq L\int_{t_0}^{t} \frac{RL^{k-1}}{(k-1)!}(s-t_0)^{k-1}ds && \text{(A.22)}\\
&= \frac{RL^k}{k!}(t-t_0)^k && \text{(A.23)}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n(t)-x_{n-1}(t)\| &\leq R\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L^{n-1}}{(n-1)!}(t-t_0)^{n-1}. && \text{(A.24)}\\
&\leq R\exp(L\delta) < \infty. && \text{(A.25)}
\end{aligned}
$$

補題 A.5 より各点 $t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$ に対して $\{x_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列である。したがって $\{x_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $D$ の中で収束列となる。その収束先をこれも各点 $t$ に対して $x_\infty(t)$ とする。これによって関数

$$x_\infty\colon [t_0-\delta, t_0+\delta] \to \mathbb{R}^n$$

が定まるがこれが $(t_0-\delta, t_0+\delta)$ で微分可能であることと式 A.13 の解であることを示したい。

これには関数 $x_\infty$ が一様収束することを示せば十分である。連続微分可能な関数列が一様収束すればその収束先の関数も連続微分可能な関数となるからである。また被積分関数が一様収束するとき積分と極限は交換可能だから A.13 即ち

$$
x_\infty(t) = \begin{cases} x_\infty(t_0) & +\int_{t_0}^{t} f(s,x_\infty(s))ds \quad (t \leq t_0) \\ x_\infty(t_0) & +\int_{t}^{t_0} f(s,x_\infty(s))ds \quad (t \geq t_0). \end{cases} \tag{A.26}
$$

さて今から $x_\infty$ が一様収束することを示す。

$$
\begin{aligned}
\|x_m(t)-x_\infty(t)\| &\leq \sum_{n=m}^{\infty}\|x_n(t)-x_\infty(t)\| && \text{(A.27)}\\
&\leq R\sum_{n=m}^{\infty}\frac{L^n\delta^n}{n!} \to 0 \quad (m\to\infty) && \text{(A.28)}
\end{aligned}
$$

これは $t$ によらないから一様収束していることを表している。つまり初期値問題 A.1A.2 は局所解を持つ。

最後に一意性を示す。A.1A.2 をみたす別の解 $x\colon [t_0-\delta, t_0+\delta]$ の共通の定義域の名前を改めて $D$ とおく。この解 $x$ もまた A.13 式を満たしているので $h(t) = \|x(t) - x_\infty(t)\|$ とおくと、

$$h(t) = \left\| \int_{t_0}^{t} [f(s, x(s)) - f(s, x_\infty(s))] ds \right\| \tag{A.29}$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \| f(s, x(s)) - f(s, x_\infty(s)) \| \, ds \tag{A.30}$$

$$\leq L \int_{t_0}^{t} \|x(s) - x_\infty(s)\| ds \tag{A.31}$$

$$= L \int_{t_0}^{t} h(s) ds. \tag{A.32}$$

$[t_0, t]$ はコンパクトなので $h(s)$ の最大値を $C$ とすると

$$h(t) \leq LC(t - t_0). \tag{A.33}$$

これを (A.32) に帰納的に代入していくと

$$h(t) \leq LC(t - t_0) \tag{A.34}$$

$$h(t) \leq CL^2 \int_{t_0}^{t} (s - t_0) ds = C \frac{L^2 (t - t_0)^2}{2} \tag{A.35}$$

$$\vdots$$

$$h(t) \leq C \frac{L^n (t - t_0)^n}{n!} \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{A.36}$$

これで初期値問題として与えられる常微分方程式の局所解は存在してさらにその解が一意であることまでわかった。 □

# 参考文献


[1] 今野宏. 微分幾何学. 大学数学出版会, 2013.

[2] 中原幹夫. 理論物理学のための幾何学とトポロジー. 桐原書店, 2000.

[3] 木村 俊房・飯高 茂・西川 青季・岡本 和夫・楠岡成雄. 常微分方程式と解析力学. 共立出版, 1998.